

用 COMSOL 模拟网球拍效应

冯睿骐, 白翠琴

(复旦大学 物理学系, 上海 200433)

摘要: 网球拍效应 (TRE) 指刚体绕第二惯量主轴旋转时的不稳定现象, 它作为生活中常见的现象, 在物理教学中常被提及, 但有关的定量实验较为缺乏. 本文中, 我们在约化相空间中给出了 TRE 的直观解释, 并利用 COMSOL 软件对该现象进行了研究, 研究了不同初始条件参数和刚体设置对翻转周期的影响. 我们发现“翻转耗时”对初始扰动不敏感, 用它代替整个翻转周期可以减少测量和仿真模拟中误差的影响, 从而在 COMSOL 仿真中实现了 0.14% 的测量误差. 此外我们利用手机进行实验, 观察到了 TRE 且定量结果与理论预期一致. 本工作有助于学生形成关于 TRE 的物理图像, 有助于 TRE 的物理教学定量实验设计.

关键词: 网球拍效应; COMSOL; 数值模拟; 约化相空间

中图分类号: O 4-1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0712(2023)07-0036-06

【DOI】 10.16854/j.cnki.1000-0712.220452

网球拍效应 (又名 Dzhanibekov 效应, 后文简记作 TRE), 由 1985 年报告了这个现象的宇航员 Valdimir Dzhanibekov 命名^[1]. 它指刚体绕第二惯量主轴的不稳定旋转现象, 在航天器控制等工程领域有重要应用^[2]. 根据经典力学较成熟的理论, 关于此现象的原理已有较多研究^[2-6]. 如 Mardesic 等人研究了 TRE 的几何起源^[2, 3], 而 TRE 中刚体的翻转周期也已经被给出^[4-6]. 作为一个生活中常见但反直觉的物理现象, TRE 在科普和物理教学中有重要意义, 但在物理实验教学中对它的定量涉及较少, 也缺乏直观的图像解释.

我们利用 COMSOL 仿真软件验证和研究了一个扳手形状刚体的网球拍效应. 我们用约化相空间给出了较简明的几何解释, 并研究了 TRE 发生的条件和各个参数对翻转周期的影响. 最后, 我们通过椭圆积分的分析提出, 用部分翻转过程耗时代替翻转周期可以增加测量的稳定性, 从而避免在仿真模拟中精度不足和实际实验中的扰动导致测量值的剧烈偏差. 此方法得到的翻转耗时倒数对初始角速度斜率的理论斜率和模拟值误差约 0.14%, 这个稳定的测量方法可以用于物理教学实验中.

1 网球拍效应原理分析

1.1 刚体旋转的稳定性和几何解释

根据 Euler 动力学方程, 在坐标轴与惯量主轴固连 ($I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$) 的直角坐标系中, 刚体的自由转动可以用以下方程组描述^[6]:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_x &= \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \Omega_y \Omega_z, \\ \dot{\Omega}_y &= \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \Omega_z \Omega_x, \\ \dot{\Omega}_z &= \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \Omega_x \Omega_y, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, Ω_i 表示角速度在 i 方向的分量, I_{ii} 是绕惯量主轴 i 的转动惯量. 如果刚体初始角速度几乎只有某一惯量主轴方向分量 (不失一般性地假设 $\Omega_z \gg \Omega_x \sim \Omega_y$), 在初始状态附近, 上式近似为

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_x &= \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \Omega_y \Omega_{0z}, \\ \dot{\Omega}_y &= \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \Omega_{0z} \Omega_x, \\ \dot{\Omega}_z &= 0 (\Omega_z^2) \end{aligned} \quad (2)$$

收稿日期: 2022-09-08; 修回日期: 2022-12-30

基金项目: 复旦大学校级教学改革项目 (FD2021A112) 资助

作者简介: 冯睿骐 (2002—), 男, 福建福州人, 复旦大学物理学系 2020 级本科生.

通信作者: 白翠琴, E-mail: cqbai@fudan.edu.cn

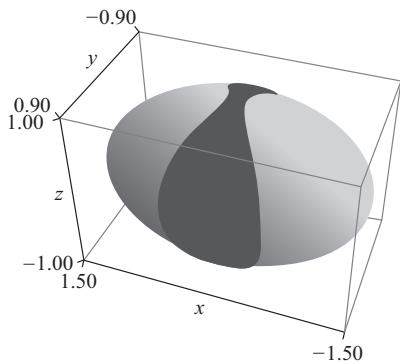


式(2)中的 Ω_{0i} 是角速度初始值的*i*方向分量. 当 $I_{yy} > I_{zz} > I_{xx}$ 或 $I_{xx} > I_{zz} > I_{yy}$, 即 I_{zz} 取中间值时, 随着时间演化, 角速度会以双曲函数的方式发散, 此时绕第二惯量主轴(*z*轴)的旋转是不稳定的; 而当 I_{zz} 不取中间值时, 旋转是稳定的.

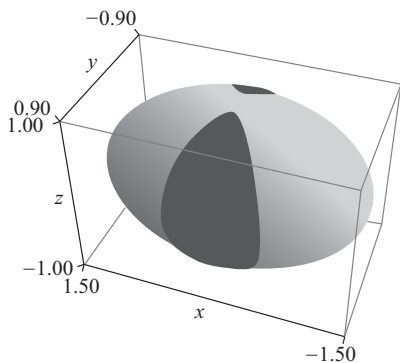
接下来给出关于上述旋转稳定性的几何解释^[2-4]: 假设系统无耗散, 能量守恒和角动量大小守恒被表示为:

$$|L|^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \quad E_k = \frac{L_x^2}{2I_{xx}} + \frac{L_y^2}{2I_{yy}} + \frac{L_z^2}{2I_{zz}} \quad (3)$$

其中 L_i 是角动量的*i*轴分量, L 是总角动量, E_k 是总动能. 将式(3)表示在由角动量分量 L_x, L_y, L_z 张成的约化相空间中, 则角动量守恒是一个球面, 能量守恒是一个椭球面, 如图 1 所示. 在给定初始条件的某次运动中, 相点被限制在图 1 中的球和椭球面的交线上, 于是相点的运动被确定了, 而且由对称性可看出运动的周期性.



(a) 角动量 *x* 分量变号



(b) 角动量 *y* 分量变号

图 1 约化相空间中的 2 种 TRE 模式

当椭球面第二长轴(*z*轴)接近球半径时, 初始角动量几乎只有*z*分量 L_{0z} , 但随时间推移会沿着相点轨迹向 $L_z = -L_{0z}$ 的对称点运动并在此后周期性震

荡, 这个现象对应着 TRE. 如图 1 所示, 由于初始条件(*x, y*方向扰动)的不同, 椭球第二长轴大于或小于球半径, 相点轨迹有 2 种模式, 它们的区别类似单摆相空间中临界附近的“振动”和“旋转”的区别. 此外, 椭球最短轴恰比球半径稍小或最长轴比球半径稍大时, 对应着刚体的稳定旋转, 这与式(2)给出的结果相同.

1.2 Euler 动力学方程的理论解和翻转周期

消去式(1)中的 Ω_x 和 Ω_y , 可得关于 Ω_z 的微分方程^[6], 将其积分可得“翻转”周期. 即 Ω_z 从最大值变为最小值的用时可用 Jacobi 椭圆积分表示

$$T = \int_0^{I_{zz}\omega_0} \frac{4dx}{\sqrt{\frac{(I_{zz}-I_{xx})(I_{yy}-I_{zz})}{I_{xx}I_{yy}I_{zz}}(|a|-x^2)(|b|-x^2)}} \quad (4)$$

其中

$$a = \frac{I_{zz}}{I_{yy}-I_{zz}} (\eta_x^2 I_{xx} + \eta_y^2 I_{yy} + \Omega_{0z}^2 I_{zz}) \cdot \left(I_{yy} - \frac{\eta_x^2 I_{xx}^2 + \eta_y^2 I_{yy}^2 + \Omega_{0z}^2 I_{zz}^2}{\eta_x^2 I_{xx} + \eta_y^2 I_{yy} + \Omega_{0z}^2 I_{zz}} \right),$$

$$b = \frac{I_{zz}}{I_{zz}-I_{xx}} \eta_x^2 I_{xx} \eta_y^2 I_{yy} + \Omega_{0z}^2 I_{zz} \left(-I_{xx} + \frac{\eta_x^2 I_{xx}^2 + \eta_y^2 I_{yy}^2 + \Omega_{0z}^2 I_{zz}^2}{\eta_x^2 I_{xx} + \eta_y^2 I_{yy} + \Omega_{0z}^2 I_{zz}} \right)$$

η_x, η_y, Ω_z 分别是*x, y, z*方向的初始角速度.

特别地, 当 $a=b$, 式(4)中的周期发散, 此时有

$$I_{zz} = \frac{I_{xx}^2 + I_{yy}^2 (\eta_y, \eta_x)^2}{I_{xx} + I_{yy} (\eta_y, \eta_x)^2} \quad (5)$$

当初始扰动满足上式时, 前述相空间中的椭球第二长轴等于球半径, 是“旋转”模式和“振动”模式的临界点.

2 模拟设置

2.1 刚体设置

研究的刚体是由 2 个均匀圆柱体组成的 T 型扳手, 如图 2 所示. 圆柱的半径均为 1 cm, 高分别为 7 cm 与 10 cm. 此刚体的惯量主轴与图示坐标轴重合, 转动惯量 $I_{xx} = 0.004\ 99\ \text{kgm}^2, I_{yy} = 0.002\ 68\ \text{kgm}^2, I_{zz} = 0.002\ 55\ \text{kgm}^2$, *z*轴是第二惯量主轴. 扳手顶端点如图所示, 在 3.1 节中, 顶端点的*z*坐标将被用于指示刚体翻转.

2.2 初始参数设置

为了研究 TRE, 假设刚体初始角速度的 3 个分量满足 $\Omega_{0z} = 20\pi\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \gg \eta_x = \eta_y = 0.1\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 模

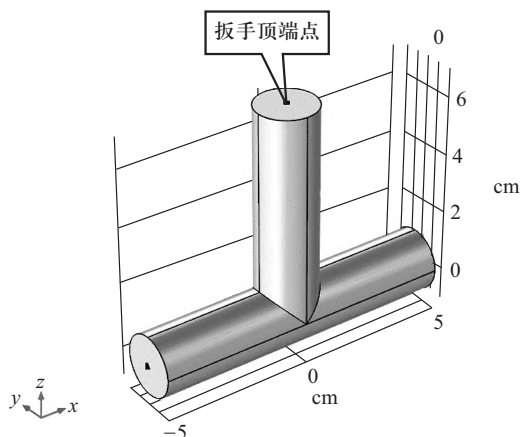


图 2 T 型扳手模型示意图

拟的时间步长为 $1 \times 10^{-3} \text{ s}$, 根据初始条件不同, 每个模拟的总时间在 5 s 到 15 s 之间.

3 结果和分析

3.1 TRE 的发生条件

通过改变长圆柱的高 L_1 改变转动惯量, 可以验证只有 I_{zz} 是中间值时才能发生 TRE. 由理论计算可得, $L_1 \approx 7.140 \text{ cm}$ 是 $I_{zz} = I_{xx}$ 的临界值. 取 L_1 分别为 7.000 cm , 7.140 cm 和 7.300 cm 进行模拟, 如图 3 和图 4 所示, 可以发现 $L_1 = 7.300 \text{ cm}$, 即 $I_{xx} > I_{yy} > I_{zz}$ 时, 扳手顶端 z 坐标和角速度 z 分量稳定, TRE 没有发生; $L_1 = 7.000 \text{ cm}$, 即 $I_{xx} > I_{zz} > I_{yy}$ 时, 扳手顶端 z 坐标绕质心、角速度 z 分量绕 0 作周期性翻转, TRE 发生; $L_1 = 7.140 \text{ cm}$, 即接近 $I_{xx} > I_{zz} = I_{yy}$ 的临界情况时, 翻转周期无限长.

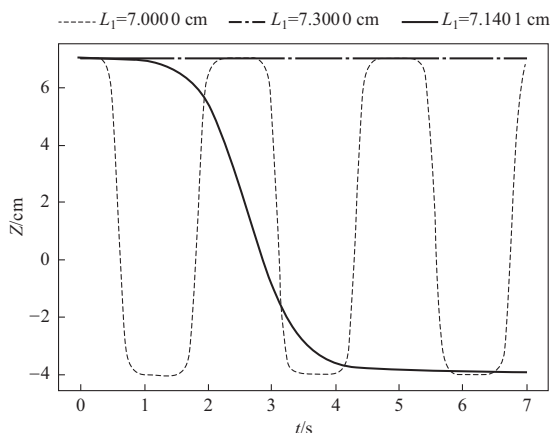


图 3 不同转动惯量下端 z 坐标随时间变化

3.2 不同初始角速度 z 分量时的翻转周期

我们对不同初始角速度下的翻转进行仿真模拟, 其翻转频率如图 5 所示, 翻转频率与初始角速度

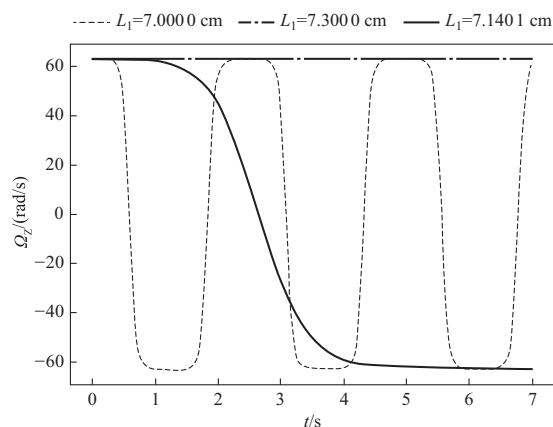


图 4 不同转动惯量下角速度 z 分量随时间变化

z 分量显示出比较好的线性关系.

为了从理论上分析其原因, 将式 (4) 中周期 T 的椭圆积分对 ab 展开, 得翻转周期的一阶近似

$$T' = \frac{-2 \log \frac{(I_{yy} - I_{xx})(\eta_y^2 I_{yy}(I_{yy} - I_{zz}) + \eta_x^2 I_{xx}(I_{xx} - I_{zz}))}{16(I_{yy} - I_{zz})(\eta_y^2 I_{yy}(I_{yy} - I_{xx}) + I_{zz} \Omega_{0z}^2(I_{zz} - I_{xx}))}}{\sqrt{\frac{(I_{yy} - I_{zz})(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy} I_{zz} I_{xx}}} \sqrt{I_{zz} \left(\frac{\eta_y^2 I_{yy}(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz} - I_{xx}} + I_{zz} \Omega_{0z}^2 \right)}} \quad (6)$$

图 5 给出由理论值的一阶近似和式 (4) 的数值积分给出的翻转频率 f . 可以发现一阶近似和近似前的结果基本重合, 因此式 (6) 是较精确的近似解. 此外 COMSOL 仿真模拟结果和理论结果也基本一致. 观察式 (6) 的形式可以发现, $f \propto \frac{x}{\log x}$, 其中 $x =$

$\sqrt{a+b \Omega_{0z}^2}$, 当 x 较大时, 对数部分增长比较慢, 函数趋于线性. 自变量 Ω_{0z} 变化范围较大时, 翻转频率和它的线性关系逐渐减弱.

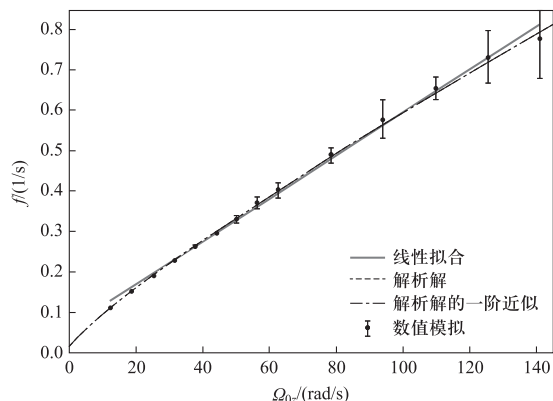


图 5 翻转频率随初始角速度 z 分量变化

3.3 不同初始扰动 η 时的翻转周期

初始扰动对翻转周期有很大影响. 同时改变 η_x, η_y , 记作 η , 进行 COMSOL 模拟并计算周期长度, 结果如图 6 所示. 可以看出, 虽然在扰动较小时, 模拟精度不足导致偏差较大, 但在 $\eta > 0.2 \text{ rad/s}$ 时, 仿真模拟和理论解符合得很好.

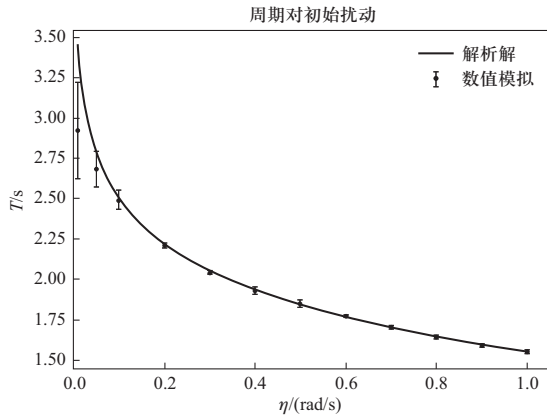


图 6 翻转周期随初始扰动变化

从图 6 还可以看出, 随着 η 增大, 翻转周期减小. 当 η 从 0.01 增加到 0.20 rad/s 时, 翻转周期理论值从约 3.45 s 迅速下降到约 2.21 s, 而 η 从 0.20 rad/s 增加到 1.00 rad/s 时, 翻转周期从 2.21 s 缓慢下降到 1.55 s. 从相空间的观点看, 翻转周期和 η 负相关的原因在于, 图 1 的模式中, 随着 η 增加, 椭球放大比例小于球的放大比例, 相点轨迹向远离临界点方向变化, 而在 η 较小时相点轨迹在临界点附近, 周期对初始扰动较为敏感, 因而翻转周期下降较快.

3.4 两种翻转模式

如图 7 所示, 不同的初始条件下, TRE 会出现 2 种模式: ω_y 恒正 (x 翻转) 和 ω_x 恒正 (y 翻转). 从相空间的观点可以进行解释: 根据初始条件不同, 图 1 中存在被限制在 $y > 0$ 和 $x > 0$ 的卦限内的相轨迹. 为了具体研究初始条件怎样影响翻转模式, 我们注意到相空间中的临界点对应着式 (5) 的等号成立, 对应的初始条件为 $\eta_x = 5.870 \eta_y$. 当 $\eta_x > 5.870 \eta_y$ 时, 相空间中椭球的第二长轴长于球半径, 导致相点轨迹不能穿过 $y = 0$ 的平面, ω_y 不变号, 这便是图 7 给出的 x 翻转模式. 相对应地, 若 $\eta_x < 5.870 \eta_y$, 则是 y 翻转模式.

3.5 更稳定的测量: 翻转耗时

如 3.3 和 3.4 所述, 在仿真模拟或实际实验中, 翻转周期对扰动敏感, 定量实验容易遇到困难. 这

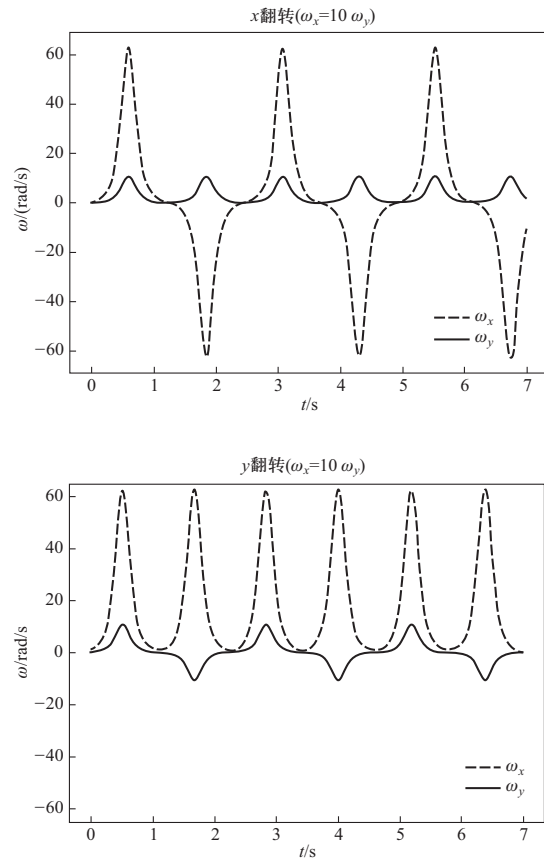


图 7 两种 TRE 翻转模式

是由于扳手顶端在 z 坐标最大 (z_{\max}) 和 z 坐标最小 (z_{\min}) 时, 相点处在相空间中的临界点附近. 为了找到更稳定的测量值, 我们不希望计算扳手顶端 z 坐标在临界点附近运动的耗时. 因此我们定义扳手角速度 z 分量在

$$\omega_{+\sqrt{2}} = \frac{\omega_{z_{\max}} + \omega_{z_{\min}}}{2} + \frac{\omega_{z_{\max}} - \omega_{z_{\min}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\omega_{-\sqrt{2}} = \frac{\omega_{z_{\max}} + \omega_{z_{\min}}}{2} - \frac{\omega_{z_{\max}} - \omega_{z_{\min}}}{2\sqrt{2}}$$

之间的时间间隔为“翻转耗时” $T_{1/\sqrt{2}}$.

为了计算“翻转耗时”, 只需将式 (4) 的积分上限改为 $I_{zz}\omega_0/\sqrt{2}$. 展开此时的椭圆积分并保留到 $\frac{\eta}{\Omega_{0z}}$ 的 0 阶项得 $T_{1/\sqrt{2}} = \frac{a}{\Omega_{0z}}$, 其中 a 只和转动惯量有关. 于是“翻转耗时”的倒数

$$f_{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{T_{1/\sqrt{2}}} \approx \sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{zz})(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx} I_{yy}}} \frac{\Omega_{0z}}{2 \log(1 + \sqrt{2})} \propto \Omega_{0z} \quad (7)$$



且在 0 阶近似下不依赖于初始扰动,是更稳定的测量值. 对 COMSOL 模拟结果进行线性拟合,结果如图 8 所示.

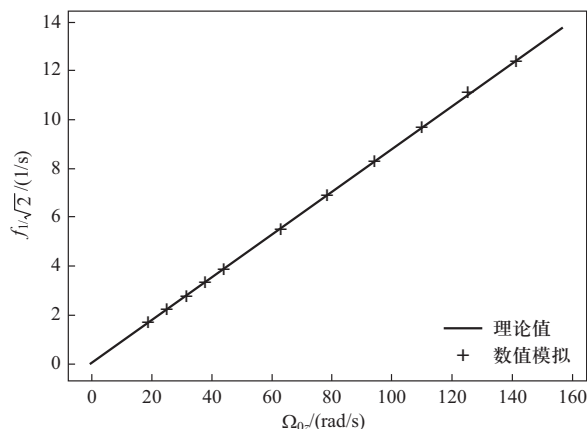


图 8 “翻转耗时”倒数随初始角速度变化

可以看出,模拟结果的线性很好,且和理论值接近. 模拟结果的线性拟合斜率 0.0877 ± 0.0002 , 与理论值 0.0876 相差 0.14% , $R^2 = 0.998$, 显著减小了模拟误差.

3.6 用手机测量翻转耗时

我们通过 PhyPhox 应用程序记录手机的角速度,进行网球拍效应的实验. 将手机近似看成长方体,分别将第一、二、三长的边的方向记为 x, z, y 轴的方向. 其中 y 方向为第二惯量主轴的方向. 计算得手机的转动惯量为 $I_{xx} = 1.529 \text{ kgm}^2$, $I_{yy} = 0.311 \text{ kgm}^2$, $I_{zz} = 1.225 \text{ kgm}^2$.

实验竖直向上抛掷手机,并使手机初始绕 z 方向转动,手机在空中的运动可以近似看作自由转动,于是可以观察到 TRE 效应. 在实验中根据初始角速度比值 ω_x, ω_y 的不同,我们观察到了两种不同的翻转模式,分别对应于 ω_x, ω_y 变号或不变号,和 3.4 节中的讨论相符. 图 9 中给出了手机沿 3 个方向角速度的一次实验结果,图中可以直观看到 TRE 效应,且 ω_x 变号、 ω_y 不变号,即 x 翻转模式.

由于初始扰动较小,直接测量周期误差较大,所以利用 3.5 节中提出的方法,将翻转耗时 $T_{1/\sqrt{z}}$ 对 $1/\Omega_{0z}$ 拟合. 进行了 26 次实验,结果如图 10 所示. 拟合斜率为 2.32 ± 0.04 ($R^2 = 0.9964$), 和将手机的转动惯量带入式(7)计算出的理论斜率 2.307 相差 0.43% . 我们推测,误差主要源于空气阻力等耗散的积累,以及初始 Ω_{0x}, Ω_{0y} 不够小,导致刚体运动偏离 TRE 条件,使得式(7)的近似引入的误差.

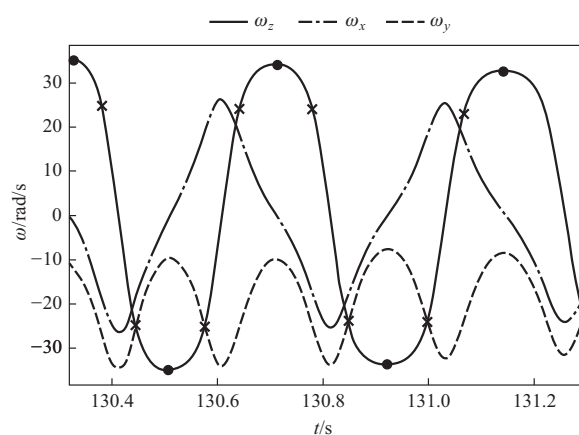


图 9 手机角速度随时间变化
(圆点表示 $\omega_{z_{\max}}$ 和 $\omega_{z_{\min}}$, 叉形表示 $\omega_{x_{+\sqrt{z}}}$ 和 $\omega_{x_{-\sqrt{z}}}$)

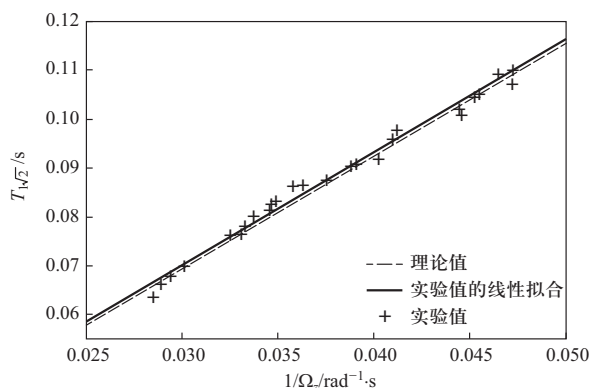


图 10 翻转耗时与初始角速度关系的理论和实验对比

4 总结

为了研究 TRE,我们在约化相空间中给出直观解释,并利用 COMSOL 进行模拟,验证了 TRE 发生需要初始状态下刚体绕第二惯量主轴转动. Euler 运动学方程的解给出 TRE 的理论翻转周期是第一类椭圆积分的形式. 通过它的展开近似,我们验证了 TRE 翻转频率和初始角速度的关系. 同时,根据理论结果我们预测 TRE 有 2 种模式并通过 COMSOL 模拟进行了验证. 我们还发现翻转过程耗时的倒数和初始角速度有很好的线性关系,COMSOL 模拟给出的斜率和理论斜率误差约为 0.14% . 并且我们利用手机进行实验,直观地观测到了 TRE 效应,验证了翻转耗时的倒数与初始角速度线性相关,与理论预期一致. 这一对扰动不敏感的测量方法和我们对 TRE 中各个参数的研究补充了有关 TRE 定量测量的物理教学实验设计,配合在约化相空间中对 TRE 的几何解释,有助于学生形成清晰的物理图像.

大学物理

参考文献:

- [1] Trivailo P, Kojima H. Enhancement of the attitude dynamics capabilities of the spinning spacecraft using inertial morphing[J]. The Aeronautical Journal, 2020, 124(1276): 838-871.
- [2] Van Damme L, Mardesic P, Sugny D. The tennis racket effect in a three-dimensional rigid body[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2017, 338:17-25.
- [3] Mardesic P, Guillen G J G, Van Damme L, et al. Geometric origin of the tennis racket effect[J]. Phys. Rev. Lett., 2020, 125:064301.
- [4] Peterson C, Schwalm W. Euler's rigid rotators, Jacobi elliptic functions, and the Dzhanibekov or tennis racket effect[J]. American Journal of Physics, 2021, 89: 349-357.
- [5] Marsden J E, Ratiu T S. Introduction to mechanics and symmetry[M]. 1998:516-521.
- [6] Landau L D, Lifshitz E M. Mechanics[M]. 4th ed. Moscow, "Nauka", 1988.
- [7] 林炯辉, 刘玉颖, 宋敏. 刚体运动三维可视化模拟和复摆相关问题探讨[J]. 大学物理, 2021, 40(07): 68-74.
- [8] 邵瀚雍. 刚体一般运动的描述[J]. 大学物理, 2021, 40(5): 62-66.
- [9] 楼晨焯, 周婧琳, 郑雪瑶, 等. 利用手机传感器测定刚体的惯性张量[J]. 大学物理, 2021, 40(11): 48-52.

Numerical simulation of tennis racket effect using COMOSL

FENG Rui-qi, BAI Cui-qin

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: Tennis racket effect (TRE) is a phenomenon that a rigid body's rotation along its second inertial axis is unstable. As a physical phenomenon observable in everyday life, it is often mentioned in physical teaching. However, quantitative analysis and experiments about it still lack. In this work, a reduced phase space is introduced to give an intuitive explanation of TRE. Numerical simulations of TRE using COMSOL inspected the conditions allowing TRE and identified two modes of TREs. Simulation results of different parameters including initial angular velocities and perturbations are explained by theoretical solutions. To reduce simulation errors, the time duration of a selected portion of the flipping process that is insensitive to perturbations, instead of the complete flipping period, is measured. This method realizes a measurement error of 0.14% in COMSOL simulation. Besides, we carried out an experiment using smartphone, in which two modes of TRE, as well as a linear dependence of the reciprocal of flipping duration to the z component of the initial angular velocity, is observed and matches theoretical predictions. Our work is both beneficial to students' understanding of TRE in physics teaching and guides the design of teaching experiments considering TRE.

Key words: tennis racket effect; COMSOL; numerical simulation; reduced phase space

(上接 27 页)

and transformation of plane elastic wave" states that in the case of relativity, the Doppler effect does not have superimposition. This view is not agreed in this article, through clarifying the relationship between the frequency transformation and the Doppler effect, and introducing the definitions of effect factor and superimposition properties, then analyzes this problem by using the phase invariant principle and the four-dimensional wave vector transformation, respectively. The conclusion is that the Doppler effect in the case of relativity is still superimposed.

Key words: effect factor; superimposition properties; four-dimensional wave vector; Lorentz transformation

大学物理

<http://dxw.bnu.edu.cn>